4.4.12 Lineární funkce I

Předpoklady: 040411

Př. 1: Jarda dumá, jak ušetřit. Benzín z místní čerpací stanice za 26,40 Kč mu přijde příliš drahý. Napadlo ho, že by raději jezdil tankovat do 8 km vzdálené čerpací stanice, kde je litr za pouze 25,70 Kč. "Neblázni," přesvědčuje ho Lenka. "Ten benzín, který spálíš, než dojedeš tam a zpátky, vyjde minimálně na 35 Kč".
Najdi funkci, která udává závislost celkové ceny na množství nakoupeného benzínu pro místní benzínku. Najdi funkci, která udává závislost celkové ceny na množství nakoupeného benzínu pro vzdálenější benzínku za předpokladu, že cesta tam a zpět vyjde na 35 Kč. Jde v obou případech o přímé úměrnosti? Kolik benzínu musí Jarda načerpat, aby se mu cesta vyplatila?

Místní pumpa: za každý litr benzínu platíme $26,40$ Kč: $y = 26,4 \cdot x$.

Vzdálená pumpa: kromě ceny za benzín platíme i cestu (připočítáváme 35 Kč).:
$y = 25,7 \cdot x + 35$.

Při nákupu menšího množství benzínu je výhodnější místní pumpa (vyšší cena benzínu nevyrovná náklady na cestu), při nákupu velkého množství benzínu se vyplatí dojet do vzdálenější pumpy (náklady na cestu se nezvyšují, ale ušetřené peníze za vlastní benzín rostou).
$\Rightarrow$ existuje množství benzínu, kdy se náklady na benzín v místě rovnají nákladům na benzín u vzdálené pumpy.

Přímou úměrností je pouze závislost pro nákup v místě.

$$26,4 \cdot x = 25,7 \cdot x + 35 \quad / -25,7x$$
$$26,4 \cdot x - 25,7 \cdot x = 35$$
$$0,7 \cdot x = 35 \quad / : 0,7$$
$$x = 50$$

Jarda by musel načepovat 50 litrů benzínu, aby se mu cesta vyplatila.

Funkce $f : y = ax + b, x \in R$ nazýváme lineární funkce. Čísla a, b označujeme jako koeficienty lineární funkce.

Př. 2: Urči koeficienty lineárních funkcí z prvního příkladu.

$y = 25,7 \cdot x + 35$: $a = 25,7$, $b = 35$

$y = 26,4 \cdot x$: $a = 25,7$, $b = 0$

Př. 3: Jaký je vztah mezi lineární funkcí a přímou úměrností?

Přímá úměrnost je speciální případ lineární funkce, pouze s nulovým členem b.

Pedagogická poznámka: Část třídy nemá s následujícím příkladem problém, ostatní je třeba poměrně brzo popostrčit tím, že nakreslím na tabuli tabulku.

Př. 4: Porovnej hodnoty a grafy lineárních funkcí v tabulce a společném obrázku:
a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = x - 2$
d) $y = 2x$ e) $y = 2x + 1$ f) $y = 2x - 2$
Jaký tvar mají grafy lineárních funkcí? Jaký vliv mají na graf funkce hodnoty koeficientu *b*? Jak graf ovlivňují hodnoty koeficientu *a*?

Hodnoty funkcí porovnáme v tabulce.

x	-5	-2	-1	0	1	2	5
$y = x$	-5	-2	-1	0	1	2	5
$y = x + 1$	-4	-1	0	1	2	3	6
$y = x - 2$	-7	-4	-3	-2	-1	0	3
$y = 2x$	-10	-4	-2	0	2	4	10
$y = 2x + 1$	-9	-3	-1	1	3	5	11
$y = 2x - 2$	-12	-6	-4	-2	0	2	8

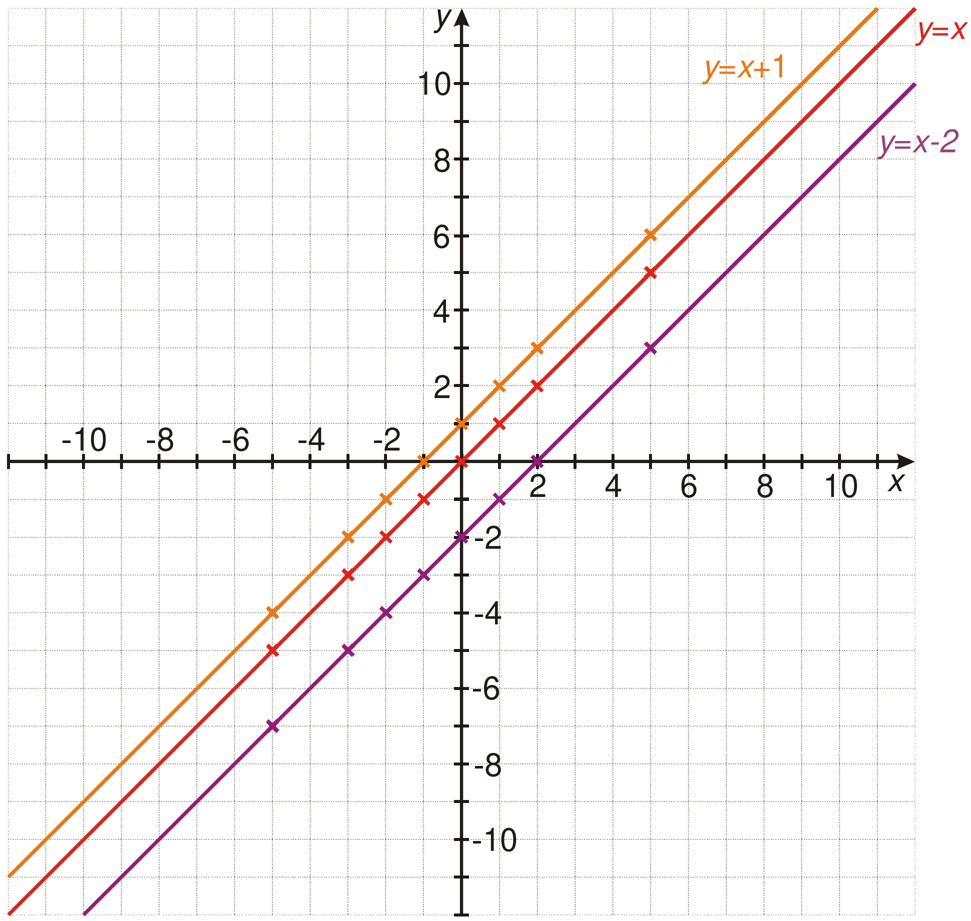
- Hodnoty v řádku funkce $y = x + 1$ jsou o 1 větší než hodnoty v řádku funkce $y = x$,
- hodnoty v řádku funkce $y = 2x + 1$ jsou o 1 větší než hodnoty v řádku funkce $y = 2x$,

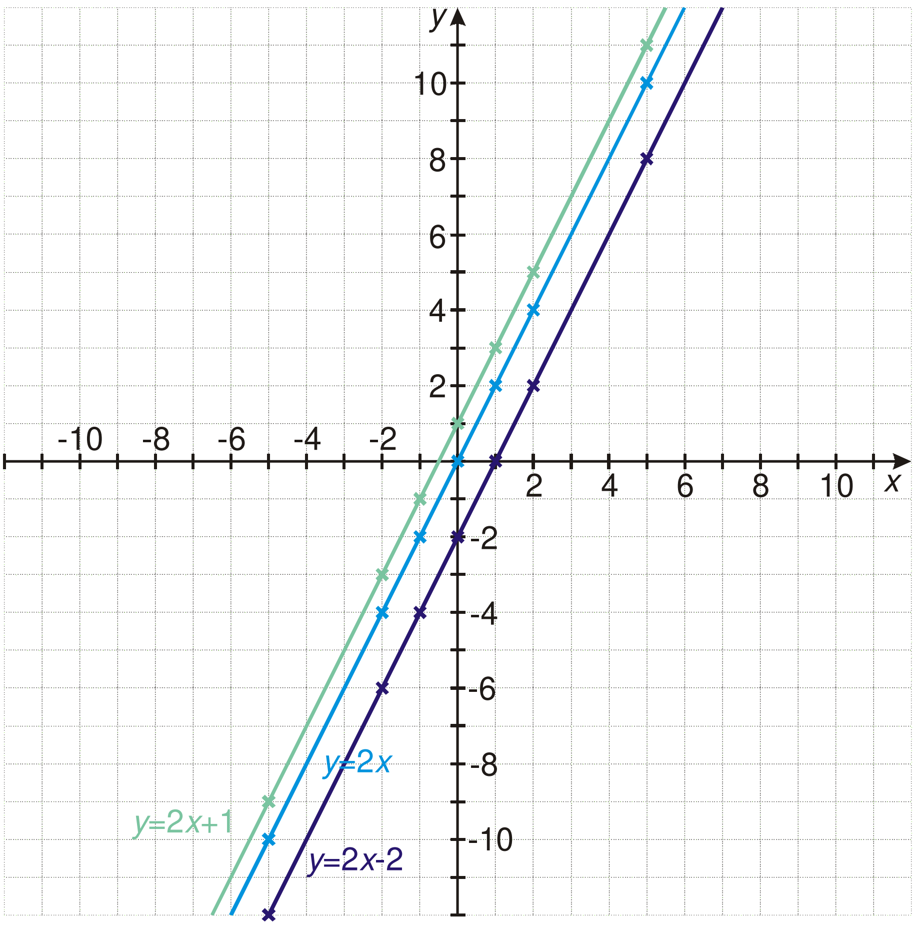
$\Rightarrow$ v obou případech zřejmý výsledek, například hodnota funkce $y = x + 1$ se od funkce $y = x$ pro libovolné x liší jenom tím, že k hodnotě funkce $y = x$ přičteme jedničku (a proto je o tuto jedničku větší).

Podobně:

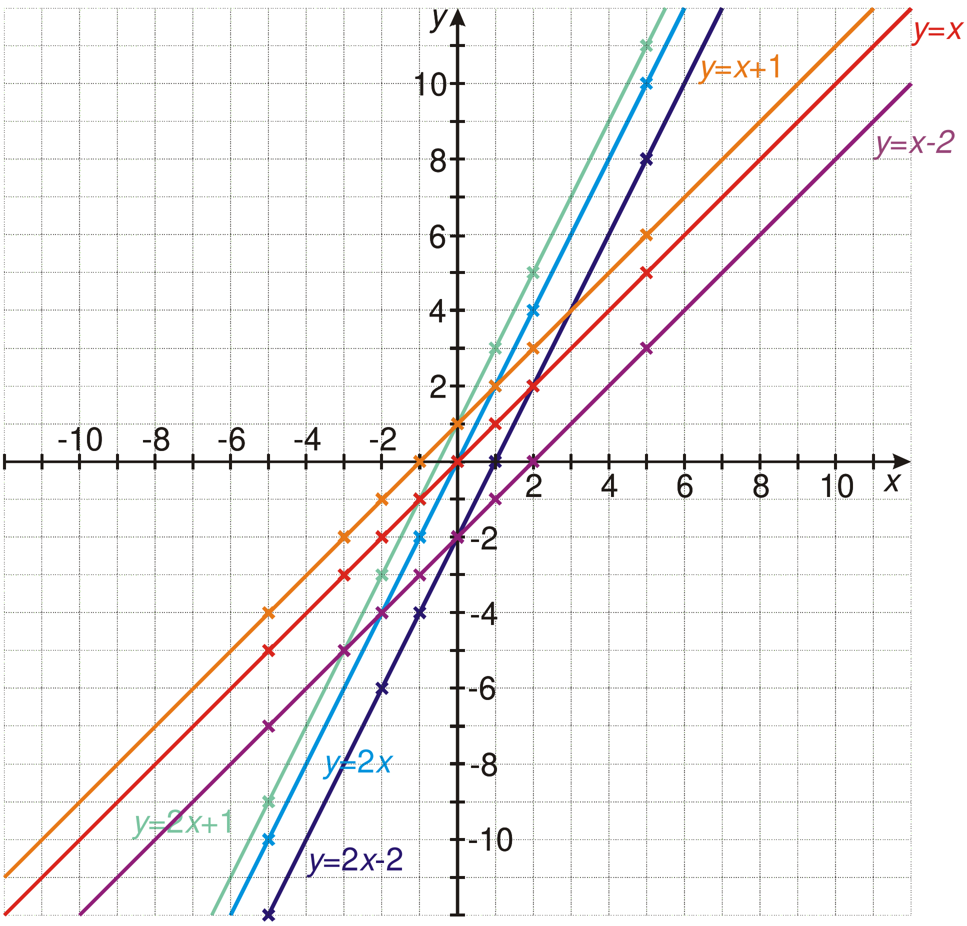
- hodnoty v řádku funkce $y = x - 2$ jsou o 2 menší než hodnoty v řádku funkce $y = x$,
- hodnoty v řádku funkce $y = 2x - 2$ jsou o 2 menší než hodnoty v řádku funkce $y = 2x$,

protože předpis funkce $y = x - 2$ se od předpisu funkce $y = x$ liší pouze odečtením dvojky (a proto je hodnota o dva menší).


y
x
y=x
y=x+1
y=x-2
10
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-10
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10



Z předchozích grafů je zřejmé, že grafy lineárních funkcí, které se navzájem liší pouze hodnotou koeficientu b, jsou rovnoběžné přímky různě posunuté ve svislém směru (protínají se s osou y v různých bodech, odpovídajících hodnotě koeficientu b).



Z obrázku je vidět:

- grafy s různou hodnotou koeficientu *a* se liší různým sklonem,
- grafy se stejnou hodnotou koeficientu *a* jsou rovnoběžné.
- grafy s různou hodnotou koeficientu *b* se s osou *y* protínají v různých bodech,
- grafy se stejnou hodnotou koeficientu *b* se s osou *y* protínají ve stejných bodech.

Ve všech případech představuje graf lineární funkce přímka.

Shrnutí: Grafem lineární funkce je přímka.